

Document joint à la liste des productions

1^{er} avril 2025

Aliaume Lopez

RÉSUMÉS EN FRANÇAIS DES ARTICLES JOINTS À LA CANDIDATURE

Contenu Ce document contient cinq explications associées aux productions incluses dans le dossier de candidature en complément du rapport d'activité et du projet de recherche. Chaque explication est indépendante et se découpe en quatre parties : un *résumé* de la production, une *contextualisation* de celle-ci, une *description* des résultats principaux, et une *conclusion*. Il n'est pas nécessaire de lire ces explications dans un ordre particulier. Par conséquent, certaines notions peuvent être redéfinies dans plusieurs explications.

Choix des documents Les documents que j'ai retenus pour ma candidature sont les suivants :

1. « When Locality Meets Preservation » (article publié à LICS 2022)
2. « Fixed Points and Noetherian Topologies » (article publié à FoSSaCS 2023)
3. « $\mathbb{Z}$ -polyregular functions » (article publié à LICS 2023)
4. « Commutative $\mathbb{N}$ -polyregular functions » (article publié à STACS 2025)
5. « Labelled Well Quasi Ordered Classes of Bounded Linear Clique-Width » (preprint)

Ces documents ont été sélectionnés pour illustrer les principaux domaines de recherches dans lequel je suis compétent, en lien avec les objectifs de mon projet de recherche. Le premier document, rédigé durant ma thèse de doctorat, traite de la théorie des modèles finis et démontre mon expertise en logique du premier ordre en lien avec la modélisation des systèmes manipulant des bases de données. Dans le deuxième document, également rédigé durant ma thèse de doctorat, j'introduit une nouvelle méthode pour construire des topologies Noëthériennes. Cette technique sera probablement mise à profit dans la partie de mon projet relative à l'étude des classes de structures finies équipées d'un beau préordre, car je conjecture que ceux-ci seront construits inductivement à partir d'une décomposition arborescente des structures. Le troisième document, rédigé en collaboration avec Gaëtan DOUÉNEAU-TABOT et Thomas COLCOMBET, considère un objet central de mon projet de recherche (les fonctions $\mathbb{N}$ -polyrégulières). En sus, le quatrième document démontre ma capacité à me saisir seul d'un nouveau sujet (les fonctions polyrégulières) et de contribuer significativement à son étude théorique. Pour finir, le cinquième et dernier document (qui n'est pas encore publié), souligne la faisabilité de l'étude des classes de graphes de largeur de clique bornée qui sont des bien préordonnées, une question centrale de mon projet de thèse.

Dans tous ces documents, excepté ma sur les fonctions $\mathbb{Z}$ -polyrégulières, je suis seul auteur et contributeur. Dans le cas de l'étude des fonctions $\mathbb{Z}$ -polyrégulières, j'ai co-écrit le papier avec Gaëtan DOUÉNEAU-TABOT, et contribué significativement au développement de l'objet clef du papier, à savoir *l'automate des résiduels* d'une fonction polyrégulière.

J'ai choisi de ne pas lister ici d'autres productions. Elles sont néanmoins listées dans mon curriculum vitæ.

Table des matières

1	Localité et théorèmes de préservation	3
1.1	Résumé	3
1.2	Contextualisation	3
1.3	Contributions	4
1.4	Conclusion	5
2	Points Fixes et Topologies Noëthériennes	7
2.1	Résumé	7
2.2	Contextualisation	7
2.2.1	Beaux préordres, terminaison, et systèmes de transitions	7
2.2.2	Un beau préordre pathologique, et des espaces topologiques	8
2.2.3	Les limites de l'approche Noëthérienne	9
2.2.4	Constructions inductives	9
2.3	Contributions de l'article	10
2.4	Conclusion	10
3	Fonctions Z-polyrégulières	12
3.1	Résumé	12
3.2	Contextualisation	12
3.3	Contributions de l'article	12
3.4	Conclusion	13
4	Commutative N-Polyregular Functions	14
4.1	Résumé	14
4.2	Contextualisation	14
4.3	Contributions de l'article	15
4.4	Conclusion	15
5	Largeur de clique linéaire et beaux préordres	16
5.1	Résumé	16
5.2	Contextualisation	16
5.3	Contributions de l'article	17
5.4	Conclusion	18

1 Localité et théorèmes de préservation

Ce document est le résumé en français de l'article [Lop22] présenté à la conférence LICS 2022, dont le pdf, les slides de présentations, ainsi que le fichier `bibtex` associé sont disponibles [sur ma page web](#).

1.1 Résumé

Cet article s'intéresse au pouvoir expressif d'un fragment de la logique du premier ordre dérivé de la forme normale de Gaifman, nommément, les combinaisons *positives* de formules closes basiques locales. Nous montrons que ces dernières ont le même pouvoir expressif que les formules closes *existentielles locales*, c'est-à-dire les formules obtenues en considérant la clôture existentielle d'une formule locale. De plus, dans le cadre des structures arbitraires, les formules existentielles locales ont le même pouvoir expressif que les formules préservées par les *plongements élémentaires locaux*, ce qui correspond à une généralisation du théorème de Łoś-Tarski. En effet, ce dernier considère les formules existentielles, qui sont précisément les formules existentielles 0-locales. Comme il est d'usage, ce théorème de préservation ne relativise pas à la classe des structures *finies*, et nous démontrons de plus que les problèmes associés à cet échec (décider si une formule est préservée, décider si une formule est équivalente à une combinaison positive de formules closes basiques locales, etc.) sont indécidables.

Nous montrons cependant que la compréhension des formules existentielles locales permet d'obtenir une caractérisation des classes de structures finies, héréditaires et closes sous union disjointe, pour lesquelles le théorème de Łoś-Tarski relativise, en montrant que ce sont exactement celles où le théorème de Łoś-Tarski relativise *localement*, c'est-à-dire, relativise aux voisinages des structures de la classe. Cette caractérisation permet de déduire simplement des résultats préexistants, et de construire de nouvelles classes de structures où le théorème de Łoś-Tarski relativise.

1.2 Contextualisation

Le théorème de Łoś-Tarski est un résultat classique de la théorie des modèles, dans la lignée des théorèmes de préservation [voir par exemple CK90, section 5.2]. En toute généralité, un théorème de préservation sert de pont entre deux classes de formules au premier ordre, l'une définie syntaxiquement, l'autre définie de manière sémantique.

Théorème [Łoś55; Tar54]. Soit σ une signature relationnelle finie, et φ une formule dans $\text{FO}[\sigma]$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une formule **existentielle** ψ équivalente à φ ,
2. Pour toute paire $A \subseteq_i B$ de structures, si $A \models \varphi$, alors $B \models \varphi$.¹

Comme de nombreux résultats de la théorie des modèles, les théorèmes de préservation reposent en général sur l'utilisation du théorème de compacité de la logique au premier ordre. Ce dernier certifie qu'un ensemble T de formules possède un modèle² si et seulement si toute partie finie de T possède un modèle. Ce théorème fondamental de la théorie des modèles ne relativise pas à l'ensemble des structures finies. En effet, il existe un ensemble de formules qui ne possède aucun modèle fini, mais dont toute partie finie possède un modèle fini. Il suffit par exemple de considérer les formules φ_n disant "il existe au moins n éléments distincts". Une structure A qui satisfait φ_n pour tout n ne peut pas être finie, mais tout sous ensemble fini des formules φ_n est satisfait par une structure finie A "assez grande".

Cependant, ce n'est pas parce que la preuve des théorèmes de préservation utilise un résultat qui ne relativise pas aux structures finies que les théorèmes eux-mêmes ne relativisent pas au cas fini. On peut imaginer d'autres preuves, plus combinatoires, qui permettraient d'obtenir ces correspondances entre syntaxe et sémantique dans ce cadre plus restreint. Notons que la relativisation du théorème de Łoś-Tarski au cas fini n'est pas triviale : plus de formules sont équivalentes lorsque l'on restreint notre attention aux modèles finis, mais simultanément, plus de formules sont préservées par extensions lorsque l'on restreint notre attention aux structures finies.

1. On utilise la notation $A \subseteq_i B$ pour désigner l'existence d'une fonction $h: A \rightarrow B$ telle que pour tout tuple $\vec{a} \in A$, et toute relation $R \in \sigma$, si $\vec{a} \in R^A$, alors $h(\vec{a}) \in R^B$. Une telle fonction est un morphisme qui témoigne que A est une *sous-structure induite* de B , ou bien, de manière équivalente que B est une *extension* de A .

2. Comprendre, il existe une structure A telle que pour tout $\varphi \in T$, $A \models \varphi$. On dit aussi que l'ensemble T est *satisfiable*.

Pour une majorité de théorèmes de préservation, il a été rapidement démontré qu'ils ne relativisent pas au cas fini [voir par exemple Tai59; Sto95; Gur84; AG94; ou plus récemment Kup21], avec une exception notable : le théorème de préservation par homomorphisme. La question du théorème de préservation par homomorphisme est restée ouverte jusqu'à ce que sa relativisation au cas fini soit démontrée par ROSSMAN [Roso8], environ 49 ans après le premier contre exemple fourni par Tait.

En parallèle des résultats négatifs obtenus sur la classe des structures finies, les relativisations des théorèmes de préservations à des classes encore plus restreintes de structures (avec degré borné, héréditaires, etc.) ont été étudiées [pour citer quelques exemples, on peut s'intéresser aux résultats de ADKo6; ADGo8; DS21; HHS15]. Concrètement, le théorème de Łoś-Tarski relativise à une classe $\mathcal{C}$ de structures lorsque les deux propositions suivantes sont équivalentes pour toute formule $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$:

1. Il existe une formule existentielle ψ équivalente à φ sur la classe $\mathcal{C}$, i.e., pour toute structure $A \in \mathcal{C}$, $A \models \varphi$ si et seulement si $A \models \psi$.
2. La formule φ est préservée par extensions sur $\mathcal{C}$, i.e., pour toute paire A, B de structures dans $\mathcal{C}$, telles que $A \subseteq_i B$, si $A \models \varphi$, alors $B \models \varphi$.

Dans le cas particulier où $\mathcal{C}$ est la classe de toutes les structures, on obtient le théorème de Łoś-Tarski. Lorsqu'on relativise le théorème aux structures finies ($\mathcal{C}$ est la classe de toutes les structures finies), la relativisation est fautive [Tai59]. Le théorème de Łoś-Tarski relativise cependant à n'importe quelle classe $\mathcal{C}$ de structures finies contenant un nombre fini de structures, ainsi qu'aux classes $\mathcal{C}$ de structures finies *héréditaires, de degré borné et closes par union disjointe* [ADGo8]. La preuve de ce dernier résultat de relativisation repose sur les techniques de théorie des modèles *finis*, comme la *localité* de la logique du premier ordre.

En effet, le théorème de Gaifman permet de réécrire n'importe quelle formule $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ en une combinaison Booléenne de formules *basiques locales* [Gai82]. Une conséquence de ce résultat est que la valeur de vérité d'une formule φ pour une structure A ne dépend que des comportements *locaux* observables dans la structure A . Dans les preuves de relativisation, le théorème de localité sert de substitut au théorème de compacité de la logique au premier ordre, en permettant de réduire le théorème au comportement local de la classe de structure étudiée.

1.3 Contributions

La première contribution de cet article est l'introduction et la caractérisation de la classe des formules *existentielles locales*. Les formules existentielles locales sont obtenues comme la clôture existentielle des formules locales. En comparaison, les formules *basiques locales* apparaissant dans la forme normale de Gaifman sont obtenues en quantifiant existentiellement sur un *ensemble r -indépendant* de témoins d'une formule locale avec une unique variable libre. Nous montrons dans un premier théorème que les formules existentielles locales ont la même expressivité que les combinaisons Booléennes *positives* de formules basiques locales. Ce résultat ne dépend pas de la classe de structure $\mathcal{C}$ considérée. Sur la classe de toutes les structures, les formules existentielles locales ont la même expressivité que les formules préservées par les *plongements élémentaires locaux*, ce qui correspond à un nouveau théorème de préservation associé à ce fragment.

Le théorème de préservation par *plongements élémentaires locaux*, comme la vaste majorité des théorèmes de préservation, ne relativise pas aux structures finies. C'est la seconde contribution de cet article. En plus de fournir un exemple de formule préservée par plongements élémentaires locaux sur les structures finies qui n'est équivalente à aucune formule existentielle locale, nous prouvons les résultats suivants :

1. On ne peut pas décider si une formule φ est préservée par plongements élémentaires locaux sur la classe des structures finies.
2. On ne peut pas décider si une formule φ est équivalente à une formule existentielle locale sur la classe des structures finies.
3. Il n'existe pas d'algorithme qui, étant donné une formule φ et une garantie que celle-ci est équivalente à une formule existentielle locale, calcule une formule existentielle locale équivalente à φ .

Ces théorèmes d'impossibilités sont obtenus sur une signature σ contenant trois relations binaires et de multiples relations unaires. Il est certainement possible de limiter l'utilisation de ces prédicats, mais le résultat ainsi formulé est plus simple et possède l'avantage de se prêter à une analyse plus fine.

En effet, les formules existentielles locales peuvent se paramétrer en fonction du rayon r de localité de la formule existentielle quantifiée. Ce paramètre r peut servir de curseur pour passer des formules existentielles 0-locales, qui sont précisément les formules existentielles, aux formules ∞ -locales, qui capturent toutes les formules au premier ordre (sur les structures finies). Les *plongements élémentaires locaux* peuvent, de la même manière, être paramétrés par ce rayon r de localité. Ainsi, une formule préservée par *plongements élémentaires* 0-locaux est précisément préservée par extensions, alors qu’une formule préservée par *plongements élémentaires* ∞ -locaux est (sur les structures finies) précisément préservée par *union disjointe* : si $A \models \varphi$, alors $A \uplus B \models \varphi$, pour toute paire A, B de structures finies.

Il existe deux autres paramètres naturels sur les formules existentielles locales : le rang de quantification q de la formule locale sous-jacente et le nombre k de variables libres quantifiées existentiellement. En faisant varier les paramètres r , q et k sur les formules existentielles locales, et sur les plongements élémentaires locaux, on obtient une relaxation de la propriété de préservation formulée comme suit : toute formule φ préservée par plongements élémentaires (r, q, k) -locaux sur les structures finies est équivalente à une formule existentielle locale sur les structures finies. Cette propriété de préservation est fausse quand $r = q = k = \infty$, mais devient vraie pour certains choix de paramètres. L’article fournit une caractérisation complète des paramètres r, q, k tels que la propriété est vraie, et montre en particulier qu’elle est vraie pour $r = 0$ et $q, k = \infty$. Ce dernier résultat, troisième contribution de l’article, se traduit comme suit :

Une formule φ préservée par extensions sur les structures finies est équivalente à une formule existentielle locale.

Plus généralement, pour n’importe quelle classe $\mathcal{C}$ de structures finies, héréditaire et close par union disjointe, une formule φ préservée par extensions sur la classe $\mathcal{C}$ est équivalente (sur cette même classe) à une formule existentielle locale. Ce théorème combinatoire (non trivial) peut se traduire en termes de forme normale de Gaifman, grâce aux résultats précédents. Il implique que toute formule φ préservée par extensions sur les structures finies (ou autre classe satisfaisant les hypothèses du théorème) possède une forme normale de Gaifman *sans négations*. Cela extrait l’essence des preuves de relativisation du théorème de Łoś-Tarski basées sur la forme normale de Gaifman, dans un cadre beaucoup plus général.

En utilisant l’existence d’une formule équivalente existentielle locale donnée par le théorème ci-dessus, prouver que le théorème de Łoś-Tarski relativisé à une classe $\mathcal{C}$ de structures héréditaire et close par union disjointe se réduit à l’étude des formules existentielles locales préservées par extensions. Il est alors aisé de déduire le théorème suivant, dit *local-à-global*, qui est la quatrième et principale contribution de l’article : les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour toute classe héréditaire $\mathcal{C}$ de structures finies close par union disjointe

1. Le théorème de Łoś-Tarski relativisé à la classe $\mathcal{C}$,
2. Pour tout $r, k \in \mathbb{N}$, le théorème de Łoś-Tarski relativisé à la classe des voisinages de rayon r centrés en k points des structures de $\mathcal{C}$.

De ce théorème, on déduit immédiatement le résultat prouvé par ATSERIAS, DAWAR et GROHE [ADGo8]. De plus, on peut construire une hiérarchie stricte de propriétés, strictement plus faibles que celles introduites par Atserias, Dawar et Grohe, impliquant la relativisation du théorème de Łoś-Tarski.

1.4 Conclusion

Cet article introduit une variante positive du théorème de localité de Gaifman, caractérisée par les formules existentielles locales et la préservation par plongements élémentaires locaux. Dans certaines classes de structures finies, les formules préservées par extensions possèdent systématiquement une forme normale de Gaifman positive, ce qui permet de réduire la relativisation du théorème de Łoś-Tarski à sa version localisée. Cette technique de preuve s’avère particulièrement efficace, puisqu’elle généralise strictement les résultats précédemment obtenus.

La notion de *localité positive* semble particulièrement pertinente pour étudier les théorèmes de préservation, mais pourrait aussi servir d’outil, au même titre que le théorème de localité, dans la théorie des modèles finis. En particulier, cette notion semble généraliser la forme normale de Gaifman existentielle proposée par GROHE et WÖHRLE [GW04].

Une des limitations de l’article, inhérente aux approches par localité, est que certaines classes de structures sont aussi complexes localement que globalement. C’est par exemple le cas des cliques, dont les voisinages de rayon 1 contiennent toute la structure.

Notons que, dans le cas des cliques, la classe obtenue en inversant la relation d'arête (les ensembles indépendants de sommets) est particulièrement bien adaptée aux techniques de localité (les voisinages sont réduits à un unique point). Il manque ainsi une théorie de la localité *modulo renversements* (flips en anglais).

2 Points Fixes et Topologies Noëthériennes

Ce document est le résumé en français de l'article [Lop23] présenté à la conférence FoSSaCS 2023, dont le pdf, les slides de présentations, ainsi que le fichier `bibtex` associé sont disponibles [sur ma page web](#).

2.1 Résumé

Les espaces Noëthériens sont une famille d'espaces topologiques qui généralisent la notion de beau préordre, et qui peuvent être utilisés afin de démontrer la terminaison de programmes. En particulier, les espaces Noëthériens ont été utilisés pour vérifier des systèmes de transition dont la description topologique est plus adaptée qu'une présentation en terme d'ordres partiels. L'objectif de l'article est de décrire une topologie Noëthérienne sur des espaces définis par induction. Cet objectif est atteint au moyen d'un théorème plus général de point fixe, lui-même basé sur un argument de mauvaise séquence minimale topologique.

2.2 Contextualisation

2.2.1 Beaux préordres, terminaison, et systèmes de transitions

Soit $(Q, \leq)$ un ensemble muni d'un préordre, c'est-à-dire d'une relation transitive et symétrique. Une séquence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bonne lorsqu'il existe une paire $i < j$ d'indices, tels que $x_i \leq x_j$. Au contraire, une séquence est dite mauvaise lorsqu'elle n'est pas bonne. Par exemple, la séquence $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bonne** dans $(\mathbb{Z}, \leq)$. En revanche, la séquence $(-n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **mauvaise** dans $(\mathbb{Z}, \leq)$. Un beau préordre est un ensemble $(Q, \leq)$ tel que toute séquence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments dans Q est **bonne**. On peut par exemple déduire des exemples précédents que $(\mathbb{Z}, \leq)$ n'est pas un **beau préordre**, et prouver séparément que $(\mathbb{N}, \leq)$ est un **beau préordre**.

Une notion similaire, qui apparaît fréquemment en informatique est la notion d'ordre bien fondé, dont la définition est la suivante : un préordre $(Q, \leq)$ est bien fondé lorsque toute séquence (strictement) décroissante stationne. C'est-à-dire, pour toute séquence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Q , telle que $x_n \leq x_m$ lorsque $m \leq n$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $x_n = x_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$. Une autre formulation est qu'il n'existe pas de séquences infinies décroissantes.³

La différence entre les **beaux préordres** et les **ordres bien fondés** peut se comprendre en regardant les implications suivantes pour un ensemble préordonné fixé $(Q, \leq)$:⁴

$$\begin{aligned} & Q \text{ bien fondé} \wedge Q \text{ totalement ordonné} \\ \implies & Q \text{ beau préordre} \\ \implies & Q \text{ bien fondé} \end{aligned}$$

Cette généralisation des **ordres bien fondés** peut servir à prouver la terminaison de certains programmes. Par exemple, prenons l'algorithme récursif suivant :

```
def program(a : int, b : int, c : int):
    if a < 0 or b < 0 or c < 0:
        return
    c = random.choice(["r", "l"])
    if c == "r":
        a, b, c = a - 1, b, 2*c
    elif c == "l":
        a, b, c = 2*c, b-1, 1
    program(a, b, c)
```

3. En travaillant dans un cadre mathématique traditionnel, de nombreuses définitions de **beaux préordres** et d'**ordres bien fondés** sont équivalentes, mais il faudra faire attention si on travaille dans un cadre plus constructif. On peut regarder par exemple le travail sur les relations "almost full" en logique intuitionniste [VCW12].

4. c'est par exemple une conséquence de la définition donnée dans certaines notes de cours [SS12, Définition 1.4].

On peut montrer que ce programme termine sur toute instance en utilisant le fait que $(\mathbb{N}^3, \leq)$ est un **beau préordre** où les inégalités se calculent point à point. En effet, imaginons une exécution infinie du programme et regardons l'évolution des valeurs du triplet $(a_n, b_n, c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, en fonction du nombre d'appels récursif. Cette séquence est **mauvaise** dans $(\mathbb{N}^3, \leq)$, car si $n < m$, soit la branche r a été prise au moins une fois, auquel cas $b_n > b_m$, ou bien seulement la branche r a été prise, auquel cas $a_n > a_m$. Comme $(\mathbb{N}^3, \leq)$ est un **beau préordre**, il n'y a pas de **mauvaise séquence** infinie. Ainsi, ce programme termine bien sur toute entrée.

Notons qu'un argument utilisant un **ordre bien fondé** est aussi possible, mais nécessite de faire un choix en donnant une importance plus grande à certaines composantes. L'utilisation de **beaux préordres** a été rendue très simple par le fait que ceux-ci peuvent se construire aisément par composition pour étudier des configurations plus complexes. Dans ce cas précis, démontrer que $(\mathbb{N}^3, \leq)$ est un **beau préordre** est une conséquence du lemme de Dickson : le produit de deux **beaux préordres**, avec l'ordre produit, est un **beau préordre**.

Il est possible de systématiser l'approche utilisée pour prouver la terminaison de notre programme exemple, en étudiant les **mauvaises séquences** de configurations du programme, et même d'en déduire des bornes sur le temps d'exécution [Fig+11; Sch17].

En tant qu'objet combinatoire, les **beaux préordres** apparaissent régulièrement [Kru72] dans des domaines variés de l'informatique, allant de la théorie des graphes avec le théorème de Robertson et Seymour [RS04], la théorie des nombres [Hig52]. Néanmoins, ce qui va motiver notre étude est l'application des **beaux préordres** aux preuves de terminaison d'algorithmes, qui ont eu un succès notable dans leur application aux "Systèmes de Transitions Bien Structurés" (WSTS) [Abd+96; AJ98; FS01; Wei+16]. L'article d'ABDULLA et al. [Abd+96] a reçu en 2016 le prestigieux "LICS Test-of-Time Award".

2.2.2 Un beau préordre pathologique, et des espaces topologiques

Un problème de taille limite l'utilisation des **beaux préordres**, particulièrement dans l'étude de systèmes de transitions infinis : l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties d'un **beau préordre** X , muni de son ordre naturel $\leq_{\text{hoare}}$ [Rad54].⁵ Cela est problématique car cette construction est utile, par exemple pour déterminer un système [Jan99; SF17; Abd+96]. Afin de rendre précis les considérations qui suivent, écrivons désormais $\mathcal{P}_{\text{ord}} : \text{Préordres} \rightarrow \text{Préordres}$ l'opération qui associe à un préordre $(X, \leq)$, le préordre $(\mathcal{P}(X), \leq_{\text{hoare}})$. Le problème soulevé par Rado peut se reformuler ainsi : il existe un **beau préordre** $(X, \leq)$, tel que $\mathcal{P}_{\text{ord}}(X, \leq)$ n'est pas un **beau préordre**. Ce problème a été contourné de trois manières différentes :

1. Une première solution est d'éviter l'utilisation des parties infinies, et se ramener à l'étude des sous-ensembles finis (qui lui est un **beau préordre**). Cette technique est *ad-hoc*.
2. Une seconde solution est de travailler avec des **beaux préordres** qui ne sont pas pathologiques, c'est-à-dire, avec des pré-meilleurs-ordres [Pou72; Mil85].
3. Une troisième et dernière approche a été proposée par GOUBAULT-LARRECQ [Gou07], qui a remarqué que la notion mathématique d'espace topologique Noëthérien (X, τ) pouvait jouer le rôle d'une *généralisation* des **beaux préordres** à un cadre topologique, dans lequel la construction de l'ensemble des parties n'est pas problématique.

Dans cet article, on s'intéresse à l'approche topologique proposée par les espaces Noëthériens. Dans ce cadre, les analogues topologiques des **WSTS** possèdent des propriétés similaires en terme de décidabilité, et on peut même construire un équivalent de méthodes avancées comme l'analyse *en avant* de Karp et Miller sur des réseaux de Pétri [Gou10]. Par ailleurs, la nature topologique de ces espaces permet de capturer des arguments de terminaison provenant aussi bien de la théorie des **beaux préordres**, que d'arguments algébriques sur des idéaux de polynômes, ce qui a permis, par exemple, la vérification de "programmes polynomiaux concurrents sur canaux avec perte" par GOUBAULT-LARRECQ [Gou10]. Les polynômes sont intégrés dans le cadre des espaces Noëthériens au travers de résultats de géométrie algébrique et la notion de *clôture de Zariski* [voir l'Exercice 9.7.53 de Gou13].

En résumé, il y a deux solutions concurrentes pour résoudre de manière systématique le problème posé par l'ensemble de Rado. Le premier est de *restreindre* l'ensemble des **beaux préordres** d'intérêts à une classe laissée stable par $\mathcal{P}_{\text{ord}}$ (les pré-meilleurs-ordres). Une seconde est de *généraliser* les ensembles considérés, de manière à conserver les propriétés de décidabilité désirées, tout en incluant l'ensemble de Rado et son ensemble des parties (les espaces Noëthériens). Il faut comprendre que, dans cette

5. C'est-à-dire, le préordre de Hoare, qui est défini par $X \leq_h Y$ si pour tout $x \in X$, il existe $y \in Y$ tel que $x \leq y$.

seconde approche, on ne peut se contenter de *restreindre* l'opération $\mathcal{P}_{\text{ord}}$, il faut inventer une nouvelle opération, $\mathcal{P}_{\text{top}}$, qui opère sur des espaces topologiques, et coïncide avec $\mathcal{P}_{\text{ord}}$ sur les préordres. Ainsi, $\mathcal{P}_{\text{top}} : \mathbf{E}.\text{Topologiques} \rightarrow \mathbf{E}.\text{Topologiques}$ appliqué à l'ensemble de Rado produit un espace topologique Noëthérien, qui ne correspond pas à un *beau préordre*.

2.2.3 Les limites de l'approche Noëthérienne

À chaque topologie τ sur un espace Q , on peut associer son préordre de spécialisation $\leq_\tau$ sur Q . Les topologies Noëthériennes généralisent les *beaux préordres* dans le sens où, pour chaque *beau préordre*, il existe une topologie Noëthérienne dont il est le *préordre de spécialisation*.^{6 7} Au contraire, plusieurs topologies peuvent avoir le même préordre de spécialisation.

Tout l'intérêt des espaces Noëthériens réside dans le fait qu'il existe des topologies Noëthériennes dont le *préordre de spécialisation* n'est pas un *beau préordre*. Cependant, cette liberté pose la question de la validité de la généralisation, dans un sens que nous allons décrire maintenant. Le lemme de Dickson prouve que si $(X, \leq_X)$ et $(Y, \leq_Y)$ sont des *beaux préordres*, alors leur produit $X \times Y$, muni de l'ordre produit $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ si et seulement si $x_1 \leq x_2$ et $y_1 \leq y_2$ est un *beau préordre*. Un analogue topologique de ce lemme est le fait que, pour deux espaces Noëthériens (X, τ_X) et (Y, τ_Y) , le produit $X \times Y$ est Noëthérien ... *pour une certaine topologie*. Pour prétendre que le lemme topologique est une généralisation du lemme de Dickson, on peut proposer les conditions suivantes :

1. Si τ_X a pour *préordre de spécialisation* $\leq_X$ et τ_Y a pour *préordre de spécialisation* $\leq_Y$, alors la topologie choisie pour le produit devrait avoir pour *préordre de spécialisation* l'ordre produit $\leq_{X \times Y}$.
2. Si τ_X est la topologie la plus fine associée à $\leq_X$, τ_Y est la topologie la plus fine associée à $\leq_Y$, et que $\leq_X$ et $\leq_Y$ sont des *beaux préordres*, alors $\tau_{X \times Y}$ est la topologie la plus fine associée à $\leq_{X \times Y}$, qui est un *beau préordre*.

Dans le cas du produit, il existe une topologie naturelle (au sens catégorique) pour cet espace, la topologie produit. Cette topologie vérifie les points 1 et 2 précédents. Mais on peut imaginer d'autres topologies, beaucoup plus étranges, qui satisfont 1 et 2. En particulier, sur des espaces topologiques qui ne proviennent pas d'espaces préordonnés, le constructeur est *extrêmement libre*, puisqu'il existe de nombreuses topologies dont le *préordre de spécialisation* est un préordre donné.⁸

Cette question de *canonicité* de la topologie associée à un constructeur peut sembler anecdotique, mais elle se retrouve de manière non triviale dans la généralisation de théorèmes plus poussés sur les *beaux préordres*, comme le fait que X^* est un *beau préordre* lorsqu'il est muni de la relation d'inclusion de sous mots de Higman, et que X était déjà lui-même un *beau préordre* [Hig52]. Le lemme de Higman topologique, proposé par GOUBAULT-LARRECQ [Gou13], propose une définition *ad-hoc* de la topologie sous-mot, vérifiant les points 1 et 2. De même, la généralisation du théorème de Kruskal, qui traite d'un *beau préordre* sur les arbres [Kru72] au cadre topologique d passe par la construction d'une topologie *bien choisie* [Gou13]. Dans les deux cas, le cadre topologique proposé est une généralisation possible du cas des préordres.

Dans le cas des préordres, les preuves du lemme de Higman et du théorème de Kruskal reposent généralement sur un argument de *mauvaise séquence minimale* introduit par NASH-WILLIAMS [Nas65]. Les preuves utilisant cette technique sont assez subtiles, et peuvent facilement s'avérer erronées [voir par exemple l'erratum de Gal97; et une preuve correcte par SSN13]. De plus, ces arguments ne sont pas compositionnels, pour chaque constructeur (mots, arbres, etc.) il faut construire un nouvel argument de mauvaise séquence minimale adapté [voir par exemple DT03; et DRT10].

Les analogues topologiques du lemme de Higman et du théorème de Kruskal obtenus pour les espaces Noëthériens reposent aussi sur des arguments de mauvaise séquence minimale, mais dans une version *topologique* [Gou13, Section 9.7]. Il faut noter cependant que les définitions comme les preuves ont une complexité accrue par rapport à leurs homologues préordonnés, et que l'argument de mauvaise séquence topologique minimale est encore plus subtil [voir l'errata n. 26 de l'article de blog Gou22b].

2.2.4 Constructions inductives

Il est possible d'argumenter que, déjà dans le cas des *beaux préordres*, le choix de l'ordre sur les mots finis ou les arbres a une grande importance, et qu'il comporte une part d'arbitraire. Cependant, les travaux de HASEGAWA [Has02] ont démontré que,

6. Il est possible de renforcer cette affirmation, mais ce n'est pas utile pour cette introduction.

7. N'ayant jamais défini la notion d'espace topologique, d'espace Noëthérien, ce résumé ne définira pas non plus le *préordre de spécialisation*.

8. Remarquons aussi que la propriété (2) n'a pas de sens si l'on considère des constructions qui ne préservent pas les *beaux préordres*, ce qui est précisément le cas de l'opération $\mathcal{P}_{\text{ord}}$.

dans un cadre assez générique, on peut définir de manière naturelle un **beau préordre** sur des constructions inductives. Pour fixer une notation, on considère un *foncteur* $F : \text{Préordres} \rightarrow \text{Préordres}$, qui préserve les **beaux préordres**, et l'objectif est de définir un **beau préordre** sur le plus petit point fixe de F (qui existera grâce à des conditions supplémentaires posées sur F). Le cadre catégorique proposé par Hasegawa permet de retrouver les théorèmes de Kruskal et le lemme de Higman à partir de la définition inductive des mots et des arbres. On peut noter que, suivant des motivations différentes, le récent travail de FREUND [Fre20] sur le théorème de Kruskal donne un autre cadre catégorique permettant de définir des **beaux préordres** sur des constructions inductives, qui coïncide bien avec les notions usuelles dans le cas des mots finis et des arbres finis. Ces deux résultats semblent relativement peu connus et utilisés par la communauté, ce qui peut s'expliquer par leur cadre théorique reposant sur des constructions non triviales en théories des catégories, et donc relativement hermétique.

Dans le cas des espaces Noëthériens, il n'existe pas de construction générique permettant de définir une topologie sur des espaces X construits comme des points fixes. De plus, les conditions placées dans les deux cadres catégoriques susmentionnés implique que les constructeurs F considérés doivent avoir un support fini, ce qui exclut d'office une grande famille de constructeurs pour les espaces Noëthériens. Le fait d'avoir un support fini revient à dire que, pour tout élément $a \in F(X)$, il existe un sous ensemble fini $Y \subseteq_{\text{fin}} X$ tel que a est construit à partir des éléments de Y . C'est bien le cas des mots et des arbres, mais cela exclut $\mathcal{P}_{\text{ord}}$ par exemple. De plus, de récents travaux sur les espaces Noëthériens ont démontré la possibilité (et l'intérêt) de placer des topologies Noëthériennes sur des espaces qui ne sont pas immédiatement obtenus comme des plus petits points fixes, comme les mots infinis [Gou22a], ou les mots de longueur ordinale [GHL22].

2.3 Contributions de l'article

Cet article apporte deux contributions principales. La première est l'introduction d'un théorème de plus petit point fixe pour les topologies Noëthériennes, basé sur un argument de mauvaise séquence minimale topologique. La seconde est l'utilisation de ce théorème pour déduire une topologie Noëthérienne sur des espaces définis inductivement.

Notons que la première contribution dévie significativement des analogues proposés dans le cadre des préordres. En effet, au lieu de considérer une suite d'espaces topologiques définie par l'équation $X_{n+1} = F(X_n)$, où le constructeur F fait varier simultanément l'ensemble des points de l'espace et sa topologie, on considère un ensemble X fixé de points et une fonction F qui raffine une topologie sur X . Dans ce cadre la construction de l'espace X est découplée de la construction de la topologie sur X . En particulier, l'espace X lui-même n'a pas besoin d'être défini par induction. Le théorème isole une condition suffisante très simple qui garantit que le plus petit point fixe est Noëthérien. En particulier, cela permet d'encapsuler toute la complexité des preuves par mauvaise séquence topologique minimale dans un théorème aux hypothèses simples (hors de tout cadre catégorique en particulier).

Dans le cas plus spécifique où l'espace X est lui-même défini par une équation de plus petit point fixe, une définition inductive d'une *topologie* sur X permet d'utiliser le théorème précédent et d'équiper X d'une topologie Noëthérienne, directement dérivée de sa construction inductive. Cela généralise la construction de HASEGAWA [Has02] au cadre topologique, au sens où, dans le cas des préordres, on retrouve exactement ce que donne le cadre proposé par HASEGAWA [Has02].

Tout au long de l'article, de nombreux exemples de constructions (mots finis, arbres finis, mots infinis, mots transfinis, arbres avec branchement ordinal, etc.) sont proposés afin d'illustrer comment le théorème de point fixe permet de généraliser les résultats déjà connus avec des preuves plus simples, en proposer de nouveaux, mais aussi montrer que cette approche *uniforme* donne une légitimité nouvelle aux généralisations topologiques des constructions sur les ordres : les topologies proposées, faute d'être les plus topologies Noëthériennes les plus fines sur un espace donné,⁹ sont obtenues par un procédé uniforme.

2.4 Conclusion

Cet article propose une condition sémantique simple permettant de garantir qu'une topologie obtenue comme un plus petit point fixe est Noëthérienne. L'idée principale est de fixer l'espace et ne faire varier que la topologie, ce qui simplifie grandement les équations et évite l'introduction d'un cadre catégorique. Par la suite, il est possible d'utiliser ce théorème de point fixe sur les *topologies* pour en déduire un théorème de point fixes sur les *espaces topologiques* dans le cadre catégorique idoine.

9. Il n'y a pas de topologie Noëthérienne la plus fine sur ces espaces en général.

Le théorème de point fixe sur les topologies semble être la bonne abstraction des arguments de mauvaise séquence minimale topologique. Tout comme ces derniers, il ne fournit aucun contrôle sur les invariants ordinaux des topologies Noëthériennes ainsi construites. En ce sens, il manque encore à la théorie une manière de contrôler quantitativement les espaces Noëthériens définis par induction.

3 Fonctions $\mathbb{Z}$ -polyrégulières

Ce document est le résumé en français de l'article [CDL23], présenté à la conférence LICS 2023, dont le pdf, les slides de présentations, ainsi que le fichier `bibtex` associé sont disponibles [sur ma page web](#).

3.1 Résumé

Cet article étudie une classe de fonction particulièrement robuste des mots finis vers les entiers relatifs. Ces fonctions, nommées $\mathbb{Z}$ -polyrégulières, admettent de nombreuses caractérisations équivalentes en termes de logique, d'expressions rationnelles, d'automates pondérés, et de transducteurs. Après avoir démontré l'équivalence (effective) de ces définitions, nous nous intéressons à deux problèmes de décision. Dans un premier temps, nous montrons que le degré de croissance d'une fonction $\mathbb{Z}$ -polyrégulière (c'est-à-dire, le plus petit k tel que $f(w) = \mathcal{O}(|w|^k)$) est calculable et correspond précisément au nombre minimal de variables requises pour exprimer la fonction à l'aide de formules MSO. Dans un second temps, nous montrons que la définissabilité au premier ordre des fonctions $\mathbb{Z}$ -polyrégulières est décidable. Ce résultat est obtenu grâce à l'introduction d'une notion nouvelle de transducteur résiduel, ainsi que d'une présentation sémantique de la notion d'apériodicité dans le cas des fonctions.

3.2 Contextualisation

Les automates déterministes reconnaissent des langages réguliers. Ces mêmes langages peuvent se caractériser par une présentation syntaxique [les expressions régulières de Kle56], une présentation logique [basée sur MSO, voir Büc60], ainsi qu'une présentation algébrique [sur la base des monoïdes finis Sch61]. Au sein des langages réguliers, une classe particulièrement intéressante possède, elle aussi une présentation multiple : celle des langages sans étoile. Ces langages se décrivent aussi bien en terme d'automates [les automates sans compteurs de MP71], d'expressions régulières [les expressions sans étoile Sch65], de logique [la logique au premier ordre FO, voir PP86], et d'algèbre [les monoïdes finis apériodiques Sch65].

De l'équivalence des présentations des langages sans étoile découle la décidabilité du problème suivant : étant donné un langage régulier L , décider s'il est sans étoile. En effet, décider si un monoïde est apériodique est relativement simple, tout comme décider si un automate est sans compteurs. Cependant, la décision repose aussi sur l'existence d'automates (ou de monoïdes) *canoniques* associées aux langages (respectivement l'automate minimal et le monoïde syntaxique), sans quoi les algorithmes susmentionnés ne permettent pas de conclure.

Les langages réguliers sont un cas particulier de fonctions des mots vers les entiers (relatifs) où les valeurs de la fonction sont prises dans le sous ensemble $\{0, 1\}$. De nombreux travaux ont entrepris de généraliser la notion de régularité à des fonctions mot-à-mot, c'est-à-dire, à des fonctions $f: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$, en lieu et place des fonctions $\mathbf{1}_L: \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$. Ces tentatives ont mené à une myriade de classes de fonctions non équivalentes (comme les fonctions séquentielles, rationnelles, régulières, polyrégulières, etc.). Les problèmes de décision associés à ces classes, et en particulier le problème de l'apériodicité, deviennent beaucoup plus difficiles à appréhender dans le cadre fonctionnel [voir Sco67]. Un obstacle conceptuel majeur provient de l'absence d'objet canonique (similaire à l'automate minimal d'un langage) associé à la fonction dans de nombreux modèles. Ainsi, il n'est pas surprenant que la récente démonstration de la décidabilité de l'apériodicité pour les fonctions rationnelles repose sur la construction d'un tel "objet canonique" sur lequel l'apériodicité est clairement visible [FGLi6; Fil+i8].

3.3 Contributions de l'article

Cet article (ré-)introduit une classe de fonctions des mots vers les entiers relatifs qui généralise les langages réguliers tout en conservant leurs propriétés de décidabilité ainsi que les différentes caractérisations de ceux-ci. Dans un premier temps, nous montrons l'équivalence (effective) des différentes présentations en termes de logique, d'expressions, d'automates pondérés, ainsi que de transducteurs.

Par la suite, nous proposons un algorithme de minimisation du nombre de variables nécessaires pour exprimer une fonction $\mathbb{Z}$ -polyrégulière f . Cela met en évidence l'égalité entre le nombre minimal de variables nécessaires et le degré de croissance de la fonction f (qui est donc calculable). Ce résultat est *très simple* à obtenir pour des fonctions à valeur dans $\mathbb{N}$ (où il était déjà connu), mais plus subtil à obtenir dans le cadre des fonctions à valeur dans $\mathbb{Z}$, à cause des compensations possibles entre termes négatifs et termes positifs. La décidabilité du degré de croissance permet ensuite l'élaboration d'un objet canonique associé à

une fonction $\mathbb{Z}$ -polyrégulière : le transducteur des résiduels. Sa définition utilise la possibilité de *soustraire* des fonctions $\mathbb{Z}$ -polyrégulières, ce qui était jusque-là un handicap dans les preuves. Sa construction est effective grâce à la décidabilité du degré de croissance.

À partir de cet objet canonique, on peut alors décider si une fonction $\mathbb{Z}$ -polyrégulière f est définissable au premier ordre (i.e., est sans étoile ou apériodique). Nous montrons que la définissabilité au premier ordre coïncide bien avec la notion d'apériodicité dans le cas des langages, et que les caractérisations alternatives se généralisent aux fonctions $\mathbb{Z}$ -polyrégulières : le transducteur des résiduels est sans compteur, les valeurs propres associées à la présentation algébrique sont 0 ou 1, la fonction s'écrit avec une expression sans étoile. De plus, nous introduisons une caractérisation sémantique originale qui généralise la notion d'apériodicité dans les monoïdes au cas des fonctions à valeur dans $\mathbb{Z}$ en termes de polynômes. Les résultats de cette seconde partie de l'article reposent crucialement sur l'étude préalable des fonctions $\mathbb{Z}$ -polyrégulières faite dans la première partie de l'article.

3.4 Conclusion

Cet article décrit une classe extrêmement robuste de fonctions généralisant les langages réguliers, qui admet de multiples caractérisations, et dont les principaux problèmes d'appartenance (degré de croissance, apériodicité) sont décidables et possèdent une procédure effective de conversion. Nous pensons que ces résultats, bien que reposant crucialement sur la possibilité de compenser des erreurs grâce aux sorties négatives (qui peut se concevoir comme une forme limitée de *backtracking*), peuvent se généraliser (avec des preuves plus combinatoires) au cadre des fonctions à valeur dans $\mathbb{N}$.

Par ailleurs, la définition de fonctions apériodiques à valeur dans $\mathbb{Z}$ ne coïncide pas avec les précédentes tentatives de généralisations des langages sans étoile aux séries rationnelles, et semble donner une direction prometteuse pour définir les "séries rationnelles apériodiques".

4 Commutative N-Polyregular Functions

Ce document est le résumé en français de l'article [Lop24a] accepté à STACS 2025, qui est disponible sur arXiv, dont le pdf, des slides de présentation, ainsi que le fichier `bibtex` associé sont disponibles [sur ma page web](#).

4.1 Résumé

Cet article étudie quelles fonctions calculées par des automates pondérés à poids dans $\mathbb{Z}$ peuvent être réalisées par des automates pondérés à poids dans $\mathbb{N}$, sous deux hypothèses supplémentaires : la commutativité (l'ordre des lettres dans l'entrée n'a pas d'importance) et la croissance polynomiale (la sortie de la fonction est bornée par un polynôme en la taille de l'entrée). J'utilise cette caractérisation effective pour décider si une fonction calculée par un automate pondéré à poids dans $\mathbb{N}$, commutatif et de croissance polynomiale, est sans étoile, une notion importée de la théorie des langages réguliers qui a fait l'objet de nombreuses investigations dans le contexte des fonctions *mot-vers-mot* au cours de la dernière décennie.

4.2 Contextualisation

Ce travail s'inscrit à l'intersection de deux domaines de recherche en théorie des automates. D'une part, la généralisation du modèle qualitatif classique des automates finis non-déterministes à un modèle quantitatif où les transitions sont étiquetées par des éléments d'un *semi-anneau* $\mathbb{S}$ (automates pondérés), et de l'autre la généralisation des langages rationnels à des *fonctions* des mots vers les mots (transductions). Ces deux directions sont en général incomparables, sauf dans le cas où le semi-anneau de l'automate pondéré est $\mathbb{N}$, et où les fonctions calculées ont un alphabet de sortie *unaire*, auquel cas l'isomorphisme $(\mathbb{N}, +) \simeq (\{1\}^*, \cdot)$ permet de faire le lien entre ces deux modèles. Commençons par rappeler quelques définitions pour comprendre le contexte de ce travail.

Les automates pondérés sont une généralisation des automates finis non-déterministes où les transitions sont étiquetées par des éléments d'un *semi-anneau* $\mathbb{S}$, par exemple $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Les fonctions calculées par ces automates sont appelées *séries rationnelles* et sont une généralisation des langages rationnels [BR10]. Les séries rationnelles à valeurs dans $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}\text{Rat}$) sont un sous-ensemble des séries rationnelles à valeurs dans $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}\text{Rat}$), et un problème ouvert est de décider si une série rationnelle dans $\mathbb{Z}\text{Rat}$ est dans $\mathbb{N}\text{Rat}$ [Kar77].

Ce problème a fait l'objet de nouvelles investigations dans le contexte des *fonctions polyrégulières* (Poly), un modèle de calcul qui vise à généraliser la théorie des langages réguliers au cadre des fonctions *mot-vers-mot* [Boj18]. Dans le cas des langages réguliers, les *langages sans étoile* forment une sous-classe robuste des langages réguliers décrits équivalents en termes de logique du premier ordre [MP71], d'automates sans compteurs [MP71], ou de monoïdes apériodiques [Sch65]. De manière analogue, il existe un fragment *sans étoile* des fonctions polyrégulières appelé *fonctions polyrégulières sans étoile* (SF) [Boj18]. Un problème ouvert dans ce domaine est de décider si une fonction polyrégulière est sans étoile.

Pour aborder les problèmes de décision sur les fonctions polyrégulières, il a été fructueux de restreindre l'alphabet de sortie à une seule lettre [Dou21; Dou22]. Parce que les mots sur un alphabet unaire sont canoniquement identifiés avec les nombres naturels, les fonctions polyrégulières à sortie unaire sont souvent appelées *fonctions $\mathbb{N}$ -polyrégulières* ($\mathbb{N}\text{Poly}$), et leur contrepartie *sans étoile* $\mathbb{N}$ -polyrégulière (NSF). Or, il se trouve que les fonctions polyrégulières avec sortie unaire forment une sous-classe des séries $\mathbb{N}$ -rationnelles, à savoir la classe des séries $\mathbb{N}$ -rationnelles avec une *croissance polynomiale*, c'est-à-dire que la sortie de la fonction est bornée par un polynôme en la taille de l'entrée. Dans mes travaux avec Colcombet et Douéneau-Tabot [CDL23], j'ai introduit avec mes co-auteurs la classe des fonctions $\mathbb{Z}$ -polyrégulières ($\mathbb{Z}\text{Poly}$), qui est une généralisation des fonctions $\mathbb{N}$ -polyrégulières autorisant des sorties négatives, et montré que l'appartenance à la sous-classe *sans étoile* $\mathbb{Z}\text{SF}$ de $\mathbb{Z}\text{Poly}$ est décidable [CDL23, Theorem V.8]. Bien que cela ne permettait pas décider NSF au sein de $\mathbb{N}\text{Poly}$, il a été conjecturé que $\mathbb{N}\text{Poly} \cap \mathbb{Z}\text{SF} = \text{NSF}$ [Dou23, Conjecture 7.61]. Ainsi, il semblerait que comprendre le problème de l'appartenance de $\mathbb{N}\text{Poly}$ dans $\mathbb{Z}\text{Poly}$, c'est-à-dire une version restreinte du problème équivalent pour les séries rationnelles, serait une étape clé pour prouver $\mathbb{N}\text{Poly} \cap \mathbb{Z}\text{SF} = \text{NSF}$, ce qui donnerait espoir pour la conception d'un algorithme pour le problème de décision sur les fonctions sans étoile.

4.3 Contributions de l'article

Dans cet article, je travaille avec une condition supplémentaire, la *commutativité de l'entrée*, c'est-à-dire que la fonction est invariante par permutation des lettres du mot en entrée. Sous cette hypothèse, je prouve que $\mathbb{NPoly} \cap \mathbb{ZSF} = \mathbb{NSF}$, comme conjecturé dans le cas général. J'ai également conçu un algorithme qui décide (sous la même hypothèse de commutativité) si une fonction dans $\mathbb{ZPoly}$ est dans $\mathbb{NPoly}$, ce qui était un problème ouvert [Dou23, Open question 5.55]. Au vu de la correspondance entre les fonctions $\mathbb{Z}$ -rationnelles de croissance polynomiale et les fonctions $\mathbb{Z}$ -polyrégulières [CDL23], cela peut être vu comme un algorithme pour le problème de décision de $\mathbb{NRat}$ au sein de $\mathbb{ZRat}$, sous la double hypothèse de *commutativité* et de *croissance polynomiale*.

Une première étape de mon travail a été de caractériser complètement les *polynômes multivariés* à coefficients dans $\mathbb{Q}$ qui sont calculables par des séries $\mathbb{N}$ -rationnelles (resp. $\mathbb{Z}$ -rationnelles). Cette caractérisation a permis de mettre en lumière une erreur dans une caractérisation précédente de ces polynômes [Kar77, Théorème 3.3, page 4]. J'ai également démontré que ce précédent résultat est correct lorsque les polynômes possèdent deux indéterminées ou moins, expliquant pourquoi cette erreur est si longtemps passée inaperçue. En plus de proposer des caractérisations décidables de ces classes polynômes, cela met en exergue la combinatoire intrinsèque des fonctions dans $\mathbb{NPoly}$ (resp. $\mathbb{ZPoly}$) en les décrivant comme des combinaisons de coefficients binomiaux. En particulier, les phénomènes observables de *division* (comme calculer la fonction $n \mapsto n(n-1)/2$) et de *soustraction* (comme calculer la fonction $n \mapsto n^2 - n + 1$) présentes pour certaines fonctions de $\mathbb{NPoly}$ n'existent qu'à cause de l'écriture des polynômes dans une base inadaptée (la base naturelle $X^2, X, 1$) au lieu d'une base utilisant des *coefficients binomiaux* translatés de la forme $\binom{X-k}{i}$. Cela permet par ailleurs de conclure que les polynômes exprimables par des fonctions $\mathbb{Z}$ -rationnelles (resp. $\mathbb{N}$ -rationnelles) sont exactement ceux exprimables par des fonctions $\mathbb{Z}$ -polyrégulières (resp. $\mathbb{N}$ -polyrégulières) sans étoile, confirmant l'intuition selon laquelle les polynômes sont des fonctions intrinsèquement *sans étoile*.

Au cours de cette étude, j'ai développé les méthodes de Douéneau-Tabot basées sur l'idée de *pompage quantitatif* de fonctions, qui joue un rôle analogue à celui du lemme classique de pompage pour les langages réguliers et les langages algébriques. Si un lemme de pompage classique s'écrit typiquement comme une équivalence de la forme $\forall n \in \mathbb{N}. uv^n w \in L \iff uvw \in L$, où L est un langage, un lemme de pompage *quantitatif* décrit la régularité d'une fonction $f: \Sigma^* \rightarrow \mathbb{Q}$ lorsqu'appliquée à des mots de la forme $uv^X w$, ainsi, $f(uv^X w)$ devient une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Q}$, qu'il est possible d'étudier avec des outils classiques d'analyse fonctionnelle. On pourra dire que $f(uv^X w)$ est une fonction *croissante*, est un *polynôme en X* , ou est bornée par un polynôme en X . Je conjecture que les propriétés d'une fonction polyrégulière f s'observent directement à travers une légère généralisation de la notion de pompage : au lieu de considérer un motif de la forme $uv^X w$, on peut considérer une *fonction polyrégulière sans étoile et commutative* p et observer $f \circ p$. Plus précisément je conjecture que :

1. Une fonction $\mathbb{Z}$ -polyrégulière f est une fonction $\mathbb{N}$ -polyrégulière si et seulement si pour toute fonction polyrégulière sans étoile et commutative p , $f \circ p$ est $\mathbb{N}$ -polyrégulière.
2. Une fonction $\mathbb{N}$ -polyrégulière f est une fonction $\mathbb{N}$ -polyrégulière *sans étoile*, si et seulement si pour toute fonction polyrégulière sans étoile et commutative p , $f \circ p$ est sans étoile.

Si ces conjectures sont vérifiées, alors le problème de décision d'appartenance à $\mathbb{NSF}$ au sein de $\mathbb{NPoly}$ et celui de l'appartenance à $\mathbb{NPoly}$ au sein de $\mathbb{ZPoly}$ sont tous deux décidables. En effet, un semi algorithme consiste à deviner une fonction dans la bonne classe ($\mathbb{NSF}$ ou $\mathbb{NPoly}$) puis tester l'équivalence, ce qui est possible pour ces fonctions. Un second semi algorithme consiste à deviner une fonction p commutative polyrégulière et sans étoile, servant de *contre exemple* puis de vérifier si $f \circ p$ appartient à la classe en question. Cette dernière étape de vérification est rendue possible grâce aux résultats obtenus sur les fonctions *commutatives*, ce qui est le cas de $f \circ p$, puisque p est commutative.

4.4 Conclusion

Dans ce travail, je corrige une erreur de plus de 40 ans et je propose une approche nouvelle et prometteuse pour répondre à deux questions ouvertes sur les fonctions polyrégulières et les séries rationnelles.

5 Largeur de clique linéaire et beaux préordres

Ce document est le résumé en français de l'article [Lop24b] qui est disponible sur arXiv, dont le pdf, des slides de présentation, ainsi que le fichier bibtex associé sont disponibles [sur ma page web](#).

5.1 Résumé

Dans cet article, je caractérise les classes de graphes largeur de clique linéaire bornée qui sont des beaux préordres pour l'ordre sous-structure induite en présence de couleurs sur les sommets. De plus, dans le cas où la classe est donnée sous la forme d'une transduction MSO depuis des mots finis, je fournis un algorithme pour décider cette propriété. Cette étude s'appuie sur des outils de la théorie des automates, et le schéma de preuve permet de dériver une version faible de la conjecture de Pouzet pour les classes de graphes de largeur de clique linéaire bornée. De manière plus générale, la ligne directrice de cet article est l'idée que les classes de *graphes* qui sont des beaux préordres pour l'ordre sous-structure induite sont en correspondance avec des classes d'*arbres* munis de l'ordre de *plongement avec trou* de DERSHOWITZ et TZAMERET [DT03]. Ceci est démontré pour les classes de graphes de largeur de clique linéaire bornée, et vérifié pour les classes de graphes étudiées par DALIGAULT, RAO et THOMASSÉ [DRT10].

5.2 Contextualisation

Un préordre $(X, \leq)$ est un *beau préordre* si toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X possède une paire croissante $i < j$ telle que $x_i \leq x_j$. Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est un beau préordre pour l'ordre produit. En théorie des graphes, le résultat fondamental de ROBERTSON et SEYMOUR [RS04] montre que l'ensemble des graphes finis est un beau préordre pour l'ordre *mineur*. Du point de vue de la vérification formelle, les beaux préordres sont au cœur des algorithmes de vérification des systèmes bien structurés [Abd+96].

Les beaux préordres possèdent une riche théorie de clôture : ils sont fermés par produit, somme, et sous-ensemble. En sus, ils sont clos par des constructeurs plus exotiques comme l'ensemble des parties finies, l'ensemble des mots finis, ou l'ensemble des arbres finis [Hig52; Kru72]. Ces propriétés rendent l'utilisation des beaux préordres aisée lors de la modélisation de systèmes bien structurés : on peut représenter les états d'un système en combinant différents beaux préordres.

Cependant, et comme étudié dans l'article LOPEZ [Lop23], l'ordre placé sur une construction comme « l'ensemble des mots finis sur $(X, \leq)$ » ou « l'ensemble des arbres finis sur $(X, \leq)$ » manque de canonicité, dans le sens où il n'existe pas de *préordre le plus fin* qui rende ces constructions bien préordonnées. La solution retenue pour a été de considérer les mots finis et les arbres finis comme des constructions *inductives*, et de proposer une définition systématique d'ordre sur ces constructions inductives.

Une autre solution, qui est celle retenue dans cet article, est de considérer que les ordres sur l'ensemble des arbres finis et des mots finis sont en réalité des ordres de *sous-structure induite*, lorsque ceux-ci sont vus comme des structures relationnelles finies. En effet, l'ordre *sous mot épars* de HIGMAN [Hig52], est en réalité l'ordre de sous-structure induite pour l'ensemble des ordres linéaires coloriés (c'est-à-dire, des mots). De manière similaire, l'ordre de plongement d'arbre de KRUSKAL [Kru72] correspond à l'ordre *sous-structure induite* sur les arbres finis représentés par des structures coloriées utilisant la relation « plus petit ancêtre commun ». Cette présentation est particulièrement naturelle, car ces ordres sont généralement *définis* en terme de morphismes [voir HSS13]. Une généralisation de cette présentation se heurte au fait que l'ensemble des graphes finis (une classe de structures très simple) n'est pas un beau préordre pour l'ordre sous-structure induite.

Avant de comprendre *quelles classes de structures relationnelles finies* donnent lieu à un constructeur de beau préordre pour l'ordre sous-structure induite, il est nécessaire de comprendre dans quel cas des classes de *graphes* possèdent cette propriété. Ce sujet a déjà été étudié par DING [Din92], où il est montré que les classes de graphes ayant *treedepth* bornée sont des beaux préordres pour l'ordre sous-structure induite, et ce même avec coloriage. Depuis, la question de la caractérisation des classes de graphes qui sont des beaux préordres pour l'ordre sous-structure induite est restée ouverte, avec des contributions récentes de DALIGAULT, RAO et THOMASSÉ [DRT10], ainsi que de DABROWSKI, LOZIN et PAULUSMA [DLP18] ou DABROWSKI, LOZIN et PAULUSMA [DLP20].

Il faut bien distinguer différentes approches en fonction de l'intérêt des auteurs et autrices :

1. Montrer qu’une classe de graphes est un *constructeurs de beaux préordres*, c’est-à-dire, que pour tout beau préordre $(X, \leq)$, l’ensemble des graphes coloriés par X est un beau préordre pour l’ordre sous-structure induite, où X est vu comme un ensemble de couleurs ordonnées.
2. Montrer qu’une classe de graphes est un *beau préordre* pour l’ordre sous-structure induite, pour tout nombre arbitrairement grand mais *fini* de couleurs. On dit alors que la classe est un *beau préordre avec étiquettes*, ou un ω -*beau préordre*.
3. Montrer qu’une classe de graphes est un *beau préordre* pour l’ordre sous-structure induite, avec un nombre fini de couleurs fixé (au moins 2 couleurs). On dit alors que la classe est un *k-beau préordre*, où k est le nombre de de couleurs utilisées.
4. Montrer qu’une classe de graphes est un *beau préordre* pour l’ordre sous-structure induite, sans aucune notion de coloriage.

Dans cet article, on s’intéressera principalement à la propriété (1), mais la littérature est plutôt concernée par les propriétés (3) et (4). Notons que (1) implique (2), qui implique (3), qui implique (4). On peut démontrer que l’implication (3) $\implies$ (4) est stricte, mais il a été conjecturé par POUZET [Pou72] que l’implication (2) $\implies$ (3) est en réalité une équivalence. Je conjecture que l’implication (1) $\implies$ (2) est également une équivalence.

Jusqu’à présent, la notion de *largeur de clique* n’a pas été utilisée dans ce résumé, et son apparition dans cet article est motivée par les travaux de DALIGAULT, RAO et THOMASSÉ [DRT10], qui ont étudié certaines classes de graphes de largeur de clique bornée et caractérisé lesquelles sont des beaux préordres pour l’ordre sous-structure induite *avec couleurs* (propriété 2). En plus de fournir un cadre théorique agréable dans lequel travailler, les auteurs conjecturent qu’une classe de graphes héréditaire¹⁰ et qui est un 2-beau préordre (propriété 3) a toujours une largeur de clique bornée [DRT10, Conjecture 5]. Originellement, la notion de largeur de clique bornée a été introduite par Courcelle [Cou91; Cou94; CER93] afin de généraliser les *langages réguliers* aux classes de graphes, et fournit un cadre théorique agréable pour représenter de telles classes.

5.3 Contributions de l’article

Dans cet article, je caractérise les classes de graphes *largeur de clique linéaire bornée* qui sont des beaux préordres pour l’ordre sous-structure induite en présence d’un nombre arbitraire couleurs (propriété 2). Cette caractérisation est incomparable à celle de [DRT10] car je me limite à la largeur de clique **linéaire**, alors que [DRT10] se limite certaines classes ayant une largeur de clique bornée.

De plus, je fournis un algorithme pour décider si une classe de graphes donnée sous la forme d’une transduction MSO depuis des mots finis est un beau préordre pour l’ordre sous-structure induite. Cet algorithme, basé sur des outils de la théorie des automates peut se généraliser pour expliquer de manière purement algébrique les résultats *ad-hoc* de DALIGAULT, RAO et THOMASSÉ [DRT10]. Enfin, je démontre que l’équivalence (1) $\iff$ (2) est vraie pour les classes de graphes de largeur de clique linéaire bornée.

Au cœur de ces résultats se trouve le théorème de factorisation de SIMON [Sim90], qui permet de remplacer les formules MSO par des arbres colorés de profondeur finie. Ce théorème permet de réduire une classe de graphes de largeur de clique linéaire bornée qui est un beau préordre à une classe de *mots imbriqués* de profondeur finie, qui est elle-même un beau préordre pour l’ordre de HIGMAN [Hig52] « imbriqué ». Cette caractérisation, en plus de révéler une structure arborescente sous-jacente pour les classes de graphes ayant une largeur de clique linéaire bornée, fait apparaître comme naturel l’ordre de plongement avec trou de DERSHOWITZ et TZAMERET [DT03] : dans le cas des mots finis, cet ordre est précisément l’ordre de Higman emboité.

Cette découverte mène à la conjecture suivante : une classe de graphes héréditaire et qui est un constructeur de beau préordre pour l’ordre sous-structure induite est en correspondance avec une classe d’arbres munie de l’ordre de “plongement avec trou” (potentiellement imbriqué) de DERSHOWITZ et TZAMERET [DT03], ce qui fait le lien avec l’étude précédemment mentionnée sur les constructions inductives [Lop23], ce préordre étant lui-même obtenu inductivement [DT03; Fre20]. J’ai démontré cette conjecture pour les classes de graphes étudiées par DALIGAULT, RAO et THOMASSÉ [DRT10].

¹⁰. C’est-à-dire, fermée par sous-structure induite.

5.4 Conclusion

Cet article démontre que l'hypothèse de *largeur de clique bornée* fournit un cadre théorique propice à l'étude des classes de graphes finis qui sont des beaux préordres pour l'ordre sous-structure induite, cela sans réduire la généralité du propos selon [DRT₁₀, Conjecture 5]. De plus, il renforce les conjectures selon lesquelles les propriétés (1), (2) et (3) sont équivalentes. Enfin, il ouvre la voie à l'étude plus générale des structures relationnelles finies, et fait le lien entre les beaux préordres obtenus en *coloriant des structures finies* et ceux obtenus via des *constructions inductives*.

Références

- [Abd+96] Parosh Aziz ABDULLA, Karlis ČERĀNS, Bengt Jonsson TSAY et YIH-KUEN. « General decidability theorems for infinite-state systems ». In : *Proceedings of LICS'96*. 1996, p. 313-321. DOI : [10.1109/LICS.1996.561359](https://doi.org/10.1109/LICS.1996.561359).
- [AJ98] Parosh Aziz ABDULLA et Bengt JONSSON. « Verifying networks of timed processes ». In : *Proceedings of TACAS'98*. T. 1384. 1998, p. 298-312. DOI : [10.1007/BFb0054179](https://doi.org/10.1007/BFb0054179).
- [AG94] Miklós AJTAI et Yuri GUREVICH. « Datalog vs first-order logic ». In : *J. Comput. Syst. Sci.* 49.3 (1994), p. 562-588. DOI : [10.1016/S0022-0000\(05\)80071-6](https://doi.org/10.1016/S0022-0000(05)80071-6).
- [ADGo8] Albert ATSERIAS, Anuj DAWAR et Martin GROHE. « Preservation under extensions on well-behaved finite structures ». In : *SIAM Journal on Computing* 38.4 (2008), p. 1364-1381. DOI : [10.1137/060658709](https://doi.org/10.1137/060658709).
- [ADKo6] Albert ATSERIAS, Anuj DAWAR et Phokion G. KOLAITIS. « On preservation under homomorphisms and unions of conjunctive queries ». In : *J. ACM* 53.2 (2006), p. 208-237. DOI : [10.1145/1131342.1131344](https://doi.org/10.1145/1131342.1131344).
- [BR10] Jean BERSTEL et Christophe REUTENAUER. *Noncommutative rational series with applications*. T. 137. 2010. DOI : [10.1017/CB09780511760860](https://doi.org/10.1017/CB09780511760860).
- [Boj18] Mikołaj BOJAŃCZYK. *Polyregular Functions*. 2018. arXiv : [1810.08760 \[cs.FL\]](https://arxiv.org/abs/1810.08760). URL : <https://arxiv.org/abs/1810.08760>.
- [Büc60] J. Richard BÜCHI. « Weak second-order arithmetic and finite automata ». In : *Mathematical Logic Quarterly* 6.1-6 (1960). DOI : [10.1002/malq.19600060105](https://doi.org/10.1002/malq.19600060105). URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/malq.19600060105>.
- [CK90] Chen Chung CHANG et H. Jerome KEISLER. *Model Theory*. T. 73. 1990.
- [CDL23] Thomas COLCOMBET, Gaëtan DOUÉNEAU-TABOT et Aliaume LOPEZ. « Z-polyregular functions ». In : *2023 38th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*. Los Alamitos, CA, USA, juin 2023, p. 1-13. DOI : [10.1109/LICS56636.2023.10175685](https://doi.org/10.1109/LICS56636.2023.10175685). eprint : [2207.07450v4](https://arxiv.org/abs/2207.07450v4). URL : <https://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/LICS56636.2023.10175685>.
- [Cou91] Bruno COURCELLE. « The monadic second-order logic of graphs V : on closing the gap between definability and recognizability ». In : *Theoretical Computer Science* 80.2 (1991), p. 153-202. DOI : [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(91\)90387-H](https://doi.org/10.1016/0304-3975(91)90387-H). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030439759190387H>.
- [Cou94] Bruno COURCELLE. « Monadic second-order definable graph transductions : a survey ». In : *Theoretical Computer Science* 126.1 (1994), p. 53-75. DOI : [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(94\)90268-2](https://doi.org/10.1016/0304-3975(94)90268-2). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304397594902682>.
- [CER93] Bruno COURCELLE, Joost ENGELFRIET et Grzegorz ROZENBERG. « Handle-rewriting hypergraph grammars ». In : *Journal of Computer and System Sciences* 46.2 (1993), p. 218-270. DOI : [https://doi.org/10.1016/0022-0000\(93\)90004-G](https://doi.org/10.1016/0022-0000(93)90004-G). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002200009390004G>.
- [DLP18] Konrad K. DABROWSKI, Vadim V. LOZIN et Daniël PAULUSMA. « Well-Quasi-Ordering versus Clique-Width : New Results on Bigenic Classes ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 130 (2018), p. 1-18. DOI : [10.1016/j.jctb.2017.09.012](https://doi.org/10.1016/j.jctb.2017.09.012). arXiv : [1611.03671 \[math.CO\]](https://arxiv.org/abs/1611.03671). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895617301004>.
- [DLP20] Konrad K. DABROWSKI, Vadim V. LOZIN et Daniël PAULUSMA. « Clique-width and Well-Quasi-Ordering of Triangle-Free Graph Classes ». In : *Journal of Computer and System Sciences* 108 (2020), p. 64-91. DOI : [10.1016/j.jcss.2019.09.001](https://doi.org/10.1016/j.jcss.2019.09.001). arXiv : [1711.08837 \[math.CO\]](https://arxiv.org/abs/1711.08837). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022000018305087>.
- [DRT10] Jean DALIGAULT, Michael RAO et Stéphan THOMASSÉ. « Well-Quasi-Order of Relabel Functions ». In : *Order* 27.3 (sept. 2010), p. 301-315. DOI : [10.1007/s11083-010-9174-0](https://doi.org/10.1007/s11083-010-9174-0). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s11083-010-9174-0>.

- [DS21] Anuj DAWAR et Abhisekh SANKARAN. « Extension Preservation in the Finite and Prefix Classes of First Order Logic ». In : *Proc. CSL'21*. T. 183. 2021, 18 :1-18 :13. DOI : [10.4230/LIPIcs.CSL.2021.18](https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2021/13452). URL : <https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2021/13452>.
- [DT03] Nachum DERSHOWITZ et Iddo TZAMERET. « Gap Embedding for Well-Quasi-Orderings ». In : *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* 84 (2003). WoLLIC'2003, 10th Workshop on Logic, Language, Information and Computation, p. 80-90. DOI : [10.1016/S1571-0661\(04\)80846-6](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1571066104808466). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1571066104808466>.
- [Din92] Guoli DING. « Subgraphs and well-quasi-ordering ». In : *Journal of Graph Theory* 16.5 (nov. 1992), p. 489-502. DOI : [10.1002/jgt.3190160509](http://dx.doi.org/10.1002/jgt.3190160509). URL : <http://dx.doi.org/10.1002/jgt.3190160509>.
- [Dou21] Gaëtan DOUÉNEAU-TABOT. « Pebble Transducers with Unary Output ». In : *46th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2021)*. T. 202. Dagstuhl, Germany, 2021, 40 :1-40 :17. DOI : [10.4230/LIPIcs.MFCS.2021.40](https://drops-dev.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.MFCS.2021.40). eprint : [2104.14019v6](https://drops-dev.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.MFCS.2021.40). URL : <https://drops-dev.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.MFCS.2021.40>.
- [Dou22] Gaëtan DOUÉNEAU-TABOT. « Hiding Pebbles When the Output Alphabet Is Unary ». In : *49th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2022)*. T. 229. Dagstuhl, Germany, 2022, 120 :1-120 :17. DOI : [10.4230/LIPIcs.ICALP.2022.120](https://drops-dev.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.ICALP.2022.120). eprint : [2112.10212v4](https://drops-dev.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.ICALP.2022.120). URL : <https://drops-dev.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.ICALP.2022.120>.
- [Dou23] Gaëtan DOUÉNEAU-TABOT. « Optimization of string transducers ». Thèse de doct. Université Paris Cité, 2023. URL : https://gdoueneau.github.io/pages/DOUÉNEAU-TABOT_Optimization-transducers_v2.pdf.
- [Fig+11] Diego FIGUEIRA, Santiago FIGUEIRA, Sylvain SCHMITZ et Philippe SCHNOEBELEN. « Ackermannian and Primitive-Recursive Bounds with Dickson's Lemma ». In : *Proceedings of LICS'11*. 2011, p. 269-278. DOI : [10.1109/LICS.2011.39](https://doi.org/10.1109/LICS.2011.39).
- [FGL16] Emmanuel FILIOT, Olivier GAUWIN et Nathan LHOTE. « Aperiodicity of Rational Functions Is PSPACE-Complete ». In : *36th IARCS Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science (FSTTCS 2016)*. T. 65. Dagstuhl, Germany, 2016, 13 :1-13 :15. DOI : [10.4230/LIPIcs.FSTTCS.2016.13](https://drops-dev.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.FSTTCS.2016.13). URL : <https://drops-dev.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.FSTTCS.2016.13>.
- [Fil+18] Emmanuel FILIOT, Olivier GAUWIN, Nathan LHOTE et Anca MUSCHOLL. « On Canonical Models for Rational Functions over Infinite Words ». In : *38th IARCS Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science (FSTTCS 2018)*. T. 122. Dagstuhl, Germany, 2018, 30 :1-30 :17. DOI : [10.4230/LIPIcs.FSTTCS.2018.30](https://drops-dev.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.FSTTCS.2018.30). URL : <https://drops-dev.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.FSTTCS.2018.30>.
- [FS01] Alain FINKEL et Philippe SCHNOEBELEN. « Well-structured transition systems everywhere ! ». en. In : *Theoretical Computer Science* 256.1 (2001), p. 63-92. DOI : [10.1016/S0304-3975\(00\)00102-X](https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S030439750000102X). URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S030439750000102X>.
- [Fre20] Anton FREUND. « From Kruskal's theorem to Friedman's gap condition ». In : *Mathematical Structures in Computer Science* 30.8 (2020), p. 952-975. DOI : [10.1017/S0960129520000298](https://doi.org/10.1017/S0960129520000298).
- [Gai82] Haim GAIFMAN. « On local and non-local properties ». In : *Proc. Herbrand Symposium*. T. 107. 1982, p. 105-135. DOI : [10.1016/S0049-237X\(08\)71879-2](https://doi.org/10.1016/S0049-237X(08)71879-2).
- [Gal97] Jean H. GALLIER. « Ann. Pure Appl. Logic : Erratum to "What's so special about Kruskal's Theorem and the ordinal Γ_0 ? A survey of some results in proof theory" [53 (1991) 199-260] ». en. In : *Annals of Pure and Applied Logic* 89.2 (1997), p. 275. DOI : [10.1016/S0168-0072\(97\)00043-2](https://doi.org/10.1016/S0168-0072(97)00043-2).
- [Gou07] Jean GOUBAULT-LARRECQ. « On Noetherian spaces ». In : *Proceedings of LICS'07*. 2007, p. 453-462. DOI : [10.1109/LICS.2007.34](https://doi.org/10.1109/LICS.2007.34).
- [Gou10] Jean GOUBAULT-LARRECQ. « Noetherian Spaces in Verification ». In : *Proceedings of ICALP'10*. T. 6199. 2010, p. 2-21. DOI : [10.1007/978-3-642-14162-1_2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-14162-1_2).
- [Gou13] Jean GOUBAULT-LARRECQ. *Non-Hausdorff Topology and Domain Theory*. T. 22. 2013. DOI : [10.1017/CBO9781139524438](https://doi.org/10.1017/CBO9781139524438).

- [Gou22a] Jean GOUBAULT-LARRECQ. « Infinitary Noetherian Constructions I. Infinite Words ». In : *Colloquium Mathematicum* 168 (2022), p. 257-286. DOI : [10.4064/cm8077-4-2021](https://doi.org/10.4064/cm8077-4-2021).
- [Gou22b] Jean GOUBAULT-LARRECQ. *Non-Hausdorff Topology and Domain Theory. Electronic supplements to the book – Errata*. 2022.
- [GHL22] Jean GOUBAULT-LARRECQ, Simon HALFON et Aliaume LOPEZ. *Infinitary Noetherian Constructions II. Transfinite Words and the Regular Subword Topology*. 2022. arXiv : [2202.05047 \[math.GN\]](https://arxiv.org/abs/2202.05047). URL : <https://doi.org/10.48550/arXiv.2202.05047>.
- [GW04] Martin GROHE et Stefan WÖHRLE. « An existential locality theorem ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 129.1–3 (2004), p. 131-148. DOI : [10.1016/j.apal.2004.01.005](https://doi.org/10.1016/j.apal.2004.01.005).
- [Gur84] Yuri GUREVICH. « Toward logic tailored for computational complexity ». In : *Computation and Proof Theory, Proceedings of LC'84*. T. 1104. 1984, p. 175-216. DOI : [10.1007/BFb0099486](https://doi.org/10.1007/BFb0099486).
- [HSS13] Christoph HAASE, Sylvain SCHMITZ et Philippe SCHNOEBELEN. « The Power of Priority Channel Systems ». In : *CONCUR 2013 – Concurrency Theory*. Berlin, Heidelberg, 2013, p. 319-333. DOI : [10.1007/978-3-642-40184-8_22](https://doi.org/10.1007/978-3-642-40184-8_22).
- [HHS15] Frederik HARWATH, Lucas HEIMBERG et Nicole SCHWEIKARDT. « Preservation and decomposition theorems for bounded degree structures ». In : *Log. Meth. Comput. Sci.* 11.4 (2015). DOI : [10.2168/LMCS-11\(4:17\)2015](https://doi.org/10.2168/LMCS-11(4:17)2015).
- [Has02] Ryu HASEGAWA. « Two applications of analytic functors ». In : *Theoretical Computer Science* 272.1 (2002), p. 113-175. DOI : [10.1016/S0304-3975\(00\)00349-2](https://doi.org/10.1016/S0304-3975(00)00349-2). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397500003492>.
- [Hig52] Graham HIGMAN. « Ordering by divisibility in abstract algebras ». In : *Proceedings of the London Mathematical Society* 3 (1952), p. 326-336. DOI : [10.1112/plms/s3-2.1.326](https://doi.org/10.1112/plms/s3-2.1.326).
- [Jan99] Petr JANČAR. « A note on well quasi-orderings for powersets ». en. In : *Information Processing Letters* 72.5 (déc. 1999), p. 155-160. DOI : [10.1016/S0020-0190\(99\)00149-0](https://doi.org/10.1016/S0020-0190(99)00149-0).
- [Kar77] Juhani KARHUMÄKI. « Remarks on commutative N-rational series ». In : *Theoretical Computer Science* 5.2 (1977), p. 211-217. DOI : [10.1016/0304-3975\(77\)90008-1](https://doi.org/10.1016/0304-3975(77)90008-1). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304397577900081>.
- [Kle56] Stephen C. KLEENE. « Representation of events in nerve nets and finite automata ». In : *Automata studies* 34 (1956), p. 3-42. DOI : [10.1515/9781400882618-002](https://doi.org/10.1515/9781400882618-002).
- [Kru72] Joseph B. KRUSKAL. « The theory of well-quasi-ordering : A frequently discovered concept ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 13 (1972), p. 297-305. DOI : [10.1016/0097-3165\(72\)90063-5](https://doi.org/10.1016/0097-3165(72)90063-5).
- [Kup21] Denis KUPERBERG. « Positive First-order Logic on Words ». In : *Proc. LICS'21*. 2021, p. 1-13. DOI : [10.1109/LICS52264.2021.9470602](https://doi.org/10.1109/LICS52264.2021.9470602).
- [Lop22] Aliaume LOPEZ. « When Locality Meets Preservation ». In : *Proceedings of the 37th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. New York, NY, USA, 2 août 2022, p. 1-14. DOI : [10.1145/3531130.3532498](https://doi.org/10.1145/3531130.3532498). URL : <https://doi.org/10.1145/3531130.3532498>.
- [Lop23] Aliaume LOPEZ. « Fixed Points and Noetherian Topologies ». In : *Foundations of Software Science and Computation Structures*. T. 13992. 2023, p. 456-476. DOI : [10.1007/978-3-031-30829-1_22](https://doi.org/10.1007/978-3-031-30829-1_22). eprint : [2207.07614](https://arxiv.org/abs/2207.07614). URL : https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-30829-1_22.
- [Lop24a] Aliaume LOPEZ. « Commutative N-polyregular functions ». preprint. 2024. arXiv : [2404.02232](https://arxiv.org/abs/2404.02232).
- [Lop24b] Aliaume LOPEZ. *Labelled Well Quasi Ordered Classes of Bounded Linear Clique-Width*. 2024. arXiv : [2405.10894 \[cs.LG\]](https://arxiv.org/abs/2405.10894). URL : <https://arxiv.org/abs/2405.10894>.
- [Łoś55] Jerzy ŁOŚ. « On the extending of models (I) ». In : *Fund. Math.* 42.1 (1955), p. 38-54. DOI : [10.4064/fm-42-1-38-54](https://doi.org/10.4064/fm-42-1-38-54).
- [MP71] Robert McNAUGHTON et Seymour A. PAPERT. *Counter-Free Automata*. 1971. DOI : [10.5555/1097043](https://doi.org/10.5555/1097043).

- [Mil85] Eric C. MILNER. « Basic wqo-and bqo-theory ». In : *Graphs and order*. T. 147. 1985, p. 487-502. DOI : [10.1007/978-94-009-5315-4_14](https://doi.org/10.1007/978-94-009-5315-4_14).
- [Nas65] Crispin St. John Alvah NASH-WILLIAMS. « On well-quasi-ordering transfinite sequences ». en. In : *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 61.1 (1965), p. 33-39. DOI : [10.1017/S0305004100038603](https://doi.org/10.1017/S0305004100038603).
- [PP86] Dominique PERRIN et Jean-Eric PIN. « First-order logic and star-free sets ». In : *Journal of Computer and System Sciences* 32.3 (1986), p. 393-406.
- [Pou72] Maurice POUZET. « Un bel ordre d'abritement et ses rapports avec les bornes d'une multirelation ». In : *CR Acad. Sci. Paris Sér. AB* 274 (1972), A1677-A1680.
- [Rad54] R. RADO. « Partial well-ordering of sets of vectors ». In : *Mathematika* 1.2 (1954), p. 89-95. DOI : [10.1112/S0025579300000565](https://doi.org/10.1112/S0025579300000565).
- [RS04] Neil ROBERTSON et Paul D. SEYMOUR. « Graph Minors. XX. Wagner's conjecture ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 92.2 (2004). Special Issue Dedicated to Professor W.T. Tutte, p. 325-357. DOI : [10.1016/j.jctb.2004.08.001](https://doi.org/10.1016/j.jctb.2004.08.001). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895604000784>.
- [Ros08] Benjamin ROSSMAN. « Homomorphism preservation theorems ». In : *Journal of the ACM* 55.3 (2008), 15 :1-15 :53. DOI : [10.1145/1379759.1379763](https://doi.org/10.1145/1379759.1379763).
- [Sch17] Sylvain SCHMITZ. « Algorithmic Complexity of Well-Quasi-Orders ». Habilitation à diriger des recherches. École normale supérieure Paris-Saclay, 2017. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01663266>.
- [SS12] Sylvain SCHMITZ et Philippe SCHNOEBELEN. « Algorithmic Aspects of WQO Theory ». France, 2012. URL : <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00727025>.
- [Sch61] Marcel P. SCHÜTZENBERGER. « On the definition of a family of automata ». In : *Information and Control* 4.2-3 (1961), p. 245-270. DOI : [10.1016/S0019-9958\(61\)80020-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(61)80020-X).
- [Sch65] Marcel P. SCHÜTZENBERGER. « On finite monoids having only trivial subgroups ». en. In : *Information and Control* 8.2 (1965), p. 190-194. DOI : [10.1016/S0019-9958\(65\)90108-7](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90108-7).
- [Sco67] Dana SCOTT. « Some definitional suggestions for automata theory ». In : *Journal of Computer and System Sciences* 1.2 (août 1967), p. 187-212. DOI : [10.1016/S0022-0000\(67\)80014-X](https://doi.org/10.1016/S0022-0000(67)80014-X). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002200006780014X>.
- [SF17] Luc SEGOUFIN et Diego FIGUEIRA. « Bottom-up automata on data trees and vertical XPath ». In : *Logical Methods in Computer Science* 13 (2017). DOI : [10.23638/LMCS-13\(4:5\)2017](https://doi.org/10.23638/LMCS-13(4:5)2017).
- [Sim90] Imre SIMON. « Factorization forests of finite height ». In : *Theoretical Computer Science* 72.1 (1990), p. 65-94. DOI : [10.1016/0304-3975\(90\)90047-L](https://doi.org/10.1016/0304-3975(90)90047-L). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030439759090047L>.
- [SSN13] Devendra SINGH, Ali Maianguwa SHUAIBU et NDAYAWO. « Simplified Proof of Kruskal's Tree Theorem ». In : *Mathematical Theory and Modeling* 3 (2013), p. 93-100. DOI : [10.13140/RG.2.2.12298.39363](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.12298.39363).
- [Sto95] Alexei P. STOLBOUSHKIN. « Finitely monotone properties ». In : *Proc. LICS'95*. 1995, p. 324-330. DOI : [10.1109/LICS.1995.523267](https://doi.org/10.1109/LICS.1995.523267).
- [Tai59] William W. TAIT. « A counterexample to a conjecture of Scott and Suppes ». In : *J. Symb. Logic* 24.1 (1959), p. 15-16. DOI : [10.2307/2964569](https://doi.org/10.2307/2964569).
- [Tar54] Alfred TARSKI. « Contributions to the Theory of Models. I ». In : *Indag. Math. (Proc.)* 57 (1954), p. 572-581. DOI : [10.1016/S1385-7258\(54\)50074-0](https://doi.org/10.1016/S1385-7258(54)50074-0).
- [VCW12] Dimitrios VYTINIOTIS, Thierry COQUAND et David WAHLSTEDT. « Stop When You Are Almost-Full ». In : *Interactive Theorem Proving*. 2012, p. 250-265. DOI : [10.1007/978-3-642-32347-8_17](https://doi.org/10.1007/978-3-642-32347-8_17). URL : http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-32347-8_17.
- [Wei+16] Jean Goubault-Larrecq WEIERMANN, Monika SEISENBERGER, Victor L. SELIVANOV et ANDREAS. « Well Quasi-Orders in Computer Science (Dagstuhl Seminar 16031) ». In : *Dagstuhl Reports* 6.1 (2016), p. 69-98. DOI : [10.4230/DagRep.6.1.69](https://doi.org/10.4230/DagRep.6.1.69).