Intégration sur un segment

Exercice 1 *(Une petite intégrale).* Trouver un équivalent quand $n \to +\infty$ de l'intégrale suivante

$$I_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{dt}{1+t^2}$$

Exercice 2 *(Exponentielle).*
On pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \mathrm{d}x$$

(a) Montrer que la suite I_n tend vers zéro

(b) Montrer que

$$I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

(c) En déduire que

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Exercice 3 *(Puissances de* $\ln$*).*
Pour $n \geq 0$ soit $I_n := \int_1^{\mathrm{e}} \ln(t)^n \mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer (sans calcul) que la suite $(I_n)_n$ possède une limite.
3. Etablir une relation de récurrence liant I_{n+1} et I_n.
4. Montrer que $\forall n \geq 0$, $0 < I_n < \frac{e}{n+1}$ et en déduire $\lim_n I_n$.
5. Montrer que $I_n = (-1)^n(a_n\mathrm{e} - n!)$ où $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'entiers > 0 vérifiant une relation de récurrence que l'on explicitera.

Exercice 4 *().*
Soit $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t} \end{array}$.

1. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.
2. En remarquant que pour $x > 0$, $\forall t \in [x, 2x]$, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{t} \leq \dfrac{\mathrm{e}^t}{t} \leq \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{t}$, déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

Exercice 5 *(Comportement d'une fonction intégrable (3232)).*
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et *décroissante*. On suppose que f est intégrable. Montrer que $f = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Indication: Encadrer $xf(x)$ par deux intégrales

Exercice 6 *(Calcul d'intégrale (683)).*
Existence et valeur pour $a > 0$ de

$$I(a) = \int_0^{\infty} \sin(t) e^{-at} dt \qquad (1)$$

Indication: Complexes

Exercice 7 *(Convexité logarithmique).* Une fonction f est $\log$-convexe si et seulement si $\log f$ est convexe.

(a) Montrer que si f est logarithmiquement convexe alors f est convexe

(b) Montrer que si f est logarithmiquement convexe alors $x \mapsto f(x)c^x$ est convexe pour tout c

(c) Montrer la réciproque

(d) En déduire que la somme de deux fonctions logarithmiquement convexes est logarithmiquement convexe.

Exercice 8 *(Suite d'intégrales).*
Calculer par récurrence

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^n u} \tag{2}$$

Exercice 9 *(Wallis).*
On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Expliciter I_0 et I_1

(b) Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

(c) Étudier les variations de I_n

(d) Déterminer la limite de I_n en découpant l'intégrale

(e) En déduire $I_{n+1} \sim I_n$

(f) Montrer que la suite (nI_nI_{n-1}) est constante

(g) Déduire $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Exercice 10 *(Suite d'integrales).*
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$.

(a) Claculer I_0 et I_1

(b) Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}

(c) En déduire I_n en fonction de n

Indication: C'est une somme horrible en fonction de la parité

(d) Montrer que $I_n \to 0$

(e) En déduire la limite des suites

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \tag{3}$$

(f) Même question avec

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \tag{4}$$